Composite Rigid-Foldable Curved Origami Structure

Tomohiro Tachi

Summary: 本研究では、多層の剛体折り可能で平坦折り可能な構造のファミリーを示す。ボールトは、剛体折り可能な、湾曲して折り曲げられた管状アーチを構成し、アーチを組み立てて多層表面を構成することによって設計できる。結果のボールトは剛体かつ平坦折り可能である。最初に、曲率と捩れ関数によって定義された空間曲線から管状構造の幾何学的構成に関わるプロセスを示す。次に、曲線折りチューブによって可能となる単一自由度の剛体折り動作を示す。最後に、ボールト構造のパラメトリック設計を示し、そのパラメータと結果の形式について議論する。

Keywords: 展開可能な構造、剛体折り紙、曲線折り紙

Introduction

剛体折り紙は、剛体パネルとヒンジを含み、展開可能シェルの設計に使用できる。このようなメカニズムを大規模に実装するには、単一のパネルの厚さだけでなく複合構造のトータルデプスも考慮し、構造の剛性を高め、内部を熱や音から遮断することが重要である。剛体折り紙[1]のパネルに厚みを与える一般的な方法は、パネルの厚さと最大折り角度の間のトレードオフの関係を持つ。したがってパネルが厚いとコンパクトに折りたためない。他の手法は、薄いパネルを含むセル構造のテッセレーションを構成し、それによって仮想の厚みを取得することである。このアプローチは連続した一自由度の動作において効率的なコンパクトな折りたたみを可能にする。これを達成するため、全体構造はそれが連続的に平らに折りたたむためのメカニズムを維持するように注意深く設計されなければならない。[2]では、対照的な円筒状の剛体折り可能なモジュールを使用してセル構造を構築している。しかしながら、これまでの研究では、設計及び構築プロセスに問題があった。(1)設計の変動は並進対称性に依存し、(2)パネルの数は非常に多くなる傾向。

本研究では、なめらかな曲線折りを持つ可展面を用い、曲線折りを用いて剛体折りかつ平坦折り可能な円筒状の構造を組み立てることで、二つの問題を解決する。通常の多面体折り紙と異なり、曲線折りはその形状の生成に表面を湾曲させる。結果、折り線の数が減り、折りたたみベースの製造が簡単になる一方で、結果として得られる3D形状は複雑で豊かに保たれる。

設計プロセルは[3]で提案された方法に基づく。組み立てられた後も折りたたみができるように、共通の空間曲線から管状構造のファミリーを生成する。本研究では、構築性を向上させるために、小さな剛体パネルを使用せずなめらかな曲線折りにメソッドを拡張する。この研究の貢献は、(1)なめらかな曲線折りの望ましくない運動学的な柔軟性を避けるための設計モジュール用のチューブの使用、及び(2)異なる断面曲線を持つボールト構造のパラメトリック設計に至る菅の断面の割合の変化の幾何学的考察を含む。

まず、空間曲線から生成された折りたたみ構造の幾何学的構造を確認し、その運動学を円筒形で議論する。次に、組み立てられたボールトのパラメトリック設計を示し、そのデザインパラメータに関連した形態学的特徴について論じる。

Geometric Construction

Single Curved Folding

まず、空間曲線から生成される曲線折り構造の基本的な幾何学を見直す。一般的な空間曲線x(s)を、境界条件x(0)とx’(0)で定義し、その曲率と捩れ関数をκ(s)、τ(s)、それぞれsによって、その弧長で空間曲線にパラメータ設定をする。次に、接ベクトルT、法線ベクトルN、従法線ベクトルBで構成される有効な連続フレネ セレフレームを以下の式で得る。

(1)

連続した有効フレームが定義されるならば、折り線が空間曲線状にある曲線折り構造を設計することができる(図1)。Resch[4]による早期のコンピュータグラフィック陰影画像のなかで、設計例を確認できる。いくつかの空間曲線によって、様々な曲線折りの面を設計することができる。2α(s)で表される曲線に沿った折り角度を定義することで、その曲線に付随する折り面を一意に決定できる。ここで、α(s)は従法線ベクトルB(s)(図2)に向かい合う接平面にからその面の接平面の角度として計算される。曲線と角度の間の幾何学的関係は、FuchsとTabachnikov[5]によって調査された以下の公式でまとめることができる。

(2)

(3)

(4)

ここで折りパターンにおける折り線の曲率はκ2D(s)、接ベクトルと２面のrulingsの間の角度はβL(s)とβR(s)である。

ネックレス, ミラー, 水, 手鏡 が含まれている画像

自動的に生成された説明

図1: 空間曲線と曲線折り

地図と文字の加工写真

自動的に生成された説明

図2: パラメータ(左: 折りパターン、右: 折りたたんだ形状、ベクトルTに沿ったそれぞれの正射影)

それゆえ、rulingベクトルは以下のようになる。

(5)

(6)

面の法線ベクトルは以下で表現される。

(7)

(8)

ここでは、rulingベクトルを正方向と負方向の両方に伸ばして得られる4つの象限の中から1つを選択することにより、同じ空間曲線とrulingベクトルのセットから4種類の幾何学的に等価な折られた面を作成できます（図02）

第１（Ｌ ＋ Ｒ ＋）または第３（Ｌ − Ｒ−）象限から、湾曲した折り畳み、すなわち展開可能な折り目付き表面を構築することができる。

第二（Ｌ − Ｒ ＋）または第四（Ｌ ＋ Ｒ−）象限から、湾曲シーム、すなわち、湾曲部で溶着された二層シートから構成された平らに折り曲げ可能な折り目付き表面が得られる。

Modular Tube

管状そしてセル状の構造は、以下の順序で設計される。まず、与えられた空間曲線から、一定の折角度(2α(s) = const.<(0,180))で、第一象限(L+R+)での曲線折りを計算する。一定の折り畳み角度では、折り目パターンは、湾曲した折り目と角度を形成する反射rlingによって特徴付けられる(βL(s)=βR(s)=β(s))。

(9)

次に、曲線1（元の曲線）と2（新しい曲線）の対応する接線ベクトルが平行になるように、アタッチされたサーフェスの一方の側（つまり右側）に別の曲線を描画します（図03）。共通のrulingラインを共有するこれらの曲線の弧長パラメータの間の対応は、s1(t)とs2(t)でそれぞれ表され、tは共通のパラメータt<[0,1]である。曲線はT1(s1(t))≡T2(s2(t))を満たし、そこで曲線iの接ベクトルはTiによって表現される。ここで、si(0)=0でsi(0)は曲線iの長さと等しい。この設計は、曲線1と曲線2がそれぞれ対応する位置s1(t)、s2(t)において同じ{T,N,B}フレームを持つことを保証する。新たな曲線は、その終点が修正されると一意に決定される。ここで、t=0における曲線の間の幅はw12|t=0 = l12|t=0 sinβRで表され、ここでl12は曲線1,2間のrulingラインの長さである。

メーター が含まれている画像

自動的に生成された説明

図3: 比率の変化を示す、曲線2と4の設計。

導き出された曲線から、同じ折りたたみ角度αを使って、2番目の象限（L + R-）に展開した曲線作成します。 2つの曲線は同じフレームを共有しているので、それらは同じrulingベクトルr1,R(t) = r2,R(t)、そしてr1,L(t) = r2,L(t)も共有します。 これにより、生成されたサーフェスが前の折り目の右側と重なって、有効な2つの折り目のあるサーフェスが形成されます（図04）。

第3象限(L- R-)を選択し、その後第四象限(L- R+)を選択して、同じ方法で、以前導出した面から曲線を設計し続ける。ここで、

(10)

曲線5と1は互いに重なり合って有効な管状表面を形成する。しき(10)はまた、構成された菅が平坦折り可能であることを保証する。つまり、2枚のシートを溶接して中央の折り線に沿って折りたたむことで菅を構成することができる(図5)。また、後述する連続的な折りたたみ動作もある。

時計, 傘 が含まれている画像

自動的に生成された説明

図４：チューブの構成

建物, ウィンドウ が含まれている画像

自動的に生成された説明

図5: 菅の平坦折り

その後、u \* w L | t = 0およびv \* w R | t = 0の任意のスケール幅でチューブを作成できます。したがって、元の曲線に関して導き出された3つの折り目x（t）のいずれも、2つのベクトル関数lLrL（t）とlRrR（t）の線形結合によって次のように記述できます。

（11）

ここで、x1（t）は元の曲線を表し、uとvは実数パラメータです。

これは、uとvの組が曲線を一意に決定することを意味し、rRに沿ったセグメントの長さがuまで合計し、rRに沿ったセグメントの長さがvまで合計する限り、構築順序は任意に設定できる（図06）。これにより、複雑なセル構造が基本的な四角形チューブとまったく同じように動作するようになります。

時計 が含まれている画像

自動的に生成された説明

図6: 導出曲線は、2つのパラメータuとvによって定義されます（順序は関係ありません）。

Width Proportion

図3から、並行の接ベクトルに基づく設計方法の結果として、曲線間の幅(対応する接線間の距離、例えば w12 = sinβ1l12)は、パラメータtに対して変化することがわかる。

幅の変化は以下のように表記できる。

(12)

(13)

これは、同じ符号のねじれτを有する曲線、例えばらせんが、ｗ １２からｗ ４１の割合で湾曲した折り畳みを生じ、ｔに対して単調に増加または減少することを意味する。 興味深い点は、断面平行四辺形の面積A 1234 = w 12 w 41がtに対して一定であることです。

Regression

新しい曲線の構築ステップは、それが可展面内にあると仮定しています。 ただし、一般的な（非円筒形）展開可能面は回帰曲線または円錐頂点を持つため、幅wR | t = 0はwR / wRlim <1のように設定する必要があります。ここで、wRlimは回帰曲線と折り目の間の幅です。wRlimは次のように計算されます。

（14）

同様に

（15）

したがって、rulingの速度関数は次のように表すことができます。

（16）

線形性を利用して、空間曲線から設計することのできる円柱状およびセル状の構造に対する全体的な限界を求めることができます。

式（１１）の２つのパラメータｕおよびｖによって表される一連の構成ステップから曲線が得られると仮定する。

それから

（17）

これにより、パラメータtの回帰直線が作成されます。

（18）

これは、その上に空間曲線が横たわることができないruling付きの表面境界を形成し、それによって有効空間曲線をもたらすuv空間内の領域を定義する。

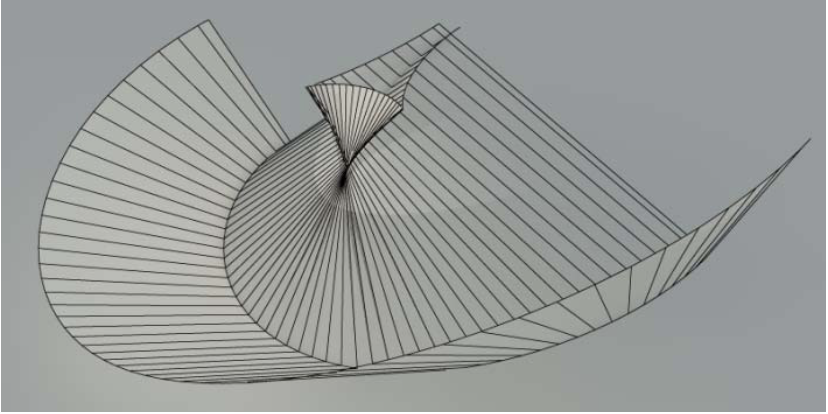


図７：回帰（退行？）

Kinematics

Single Curved Foldings vs. Tube Structure

一般に、湾曲した折り畳みは、２つの方法で変換することができる：rulingの位置を変えずに折り畳むこと（δβＬ ＝ δβＲ ＝ ０）と、rulingの変化を伴ってねじること（図０８）。

パネルが無限に細分化されているので、それは個別のクワッドパネル折り畳みの堅い折り畳み運動の限界であるので、我々は前者の運動を曲線折りの「剛体折り」と呼ぶ。

後者の運動もまた、材料の伸張を伴わない有効な運動であり、滑らかな湾曲折り畳みに特有のものである。

境界線0と2、折り目曲線1、および始点での折りたたみ角度α1(0)の間の連続的なルーリングの配置マッピングS 0,1：s 0 - > s 1およびS 1 2：s 1 - > s 2を使用して構成をパラメータ化できます。

Ｓｉ、ｉ ＋ １はβ１Ｌとβ１Ｒを一意に決定し、式（３）と（４）は微分方程式を与える。それを通して折り畳み角度α（ｓ）とねじれτ（ｓ）は一意に決定される。

変動ΔＳ０，１およびΔＳ１，２のいずれも、ルーリングの並びの変化を伴う有効な変換に対応する。

したがって、単一の湾曲した折り目を有する湾曲した折り畳みは、過剰な自由度を有し、その形態および動きを制御するのが難しい。

櫛, シャツ が含まれている画像

自動的に生成された説明

図8: 漂流するrulingによる折りたたみ運動

対照的に、漂流運動は管状構造内で制限することができる。我々は同様に、整列Ｓ ｉ、ｉ ＋ １：ｓ ｉ→ｓ ｉ ＋ １およびαｉ（０）（ｉ ＝ ０、．．． ４）によって管の構成をパラメータ化する。しかしながら、この場合、各折り目が折り目を接続する展開可能なストリップの中央に切れ目を追加することによって分離すると、Ｓｉ、ｉ ＋ １、およびαi(0)が任意に与えられた時にカット境界が隣接するものと一致しないため、パラメータを独立に決定できない。隣接する折り目iとi + 1で共有される一貫したサーフェスを構築するには、速度関数siとsi + 1に対するサーフェスの曲率が同じである必要があります。| AAA | = | BBB |、

これは次のように表すことができます。

（19）

ここで、iが奇数の場合、βi、i + 1およびβi+ 1、i1はそれぞれβi、Rおよびβi+ 1、Rを表し、iが偶数の場合はβi、Lおよびβi+ 1、Lをそれぞれ表す。

さらに、円柱への同相写像を維持するには、閉包条件を割り当てる必要があります。管の境界曲線が直線に保たれていると仮定すると、境界はα１（０）＝ α２（０）＝ α３（０）＝ α４（０）を維持する剪断運動に従う。

まとめると、動きは、単一​​のパラメータα１（０）と、式（１９）によって与えられる４つの恒等式によって制約される４つのルーリングアラインメント関数δＳｉ、ｉ ＋ １とによってパラメータ化される。これは、一般的な場合において、α１（０）が固定されている場合に管を安定化させるのに十分な数の制約があることを意味する。境界曲線がまっすぐな四角形でサーフェス上に円錐の頂点が存在しない場合は、剛体の折りたたみ運動が唯一の利用可能な運動になると推測します。しかし、これは証明されていません。

ここで、前者の仮定は境界の強化によって実現することができるが、後者は円錐頂部に無限の弾性エネルギーを蓄える薄い弾性シートの物理的挙動の結果である。

Tubes can Rigidly Fold

剛体の折り畳み運動では、κi,2 D、βi,i + 1、ds i / ds i + 1などの固有パラメータは変化しません。したがって、δα１（ｔ）≡δα２（ｔ）≡δα３（ｔ）≡δα４（ｔ）≡δαとなる折り畳み運動は、式（１９）を満たす。所与の折り曲げ角２α∈ ［０，１８０°）に対して、曲率κ（ｓ）≡κ０（ｓ）ｃｏｓα０（ｓ）／ねじれτ（ｓ）≡τ０（ｓ）ｔａｎα（ｓ）によって定義される曲線。 ）/tanα0（s）は折り畳まれた状態の曲線であり、折り畳み角2α0∈[0,180°）における元の空間曲線は曲率κ0（s）とねじれτ0（s）によって定義されます。セル構造は、同じ方法で堅くそして平らに折り畳まれる。 これは、共通の接線ベクトルから直交するように投影された共通のパラメータｔにおける罫線付き面の平行な接線ベクトルおよび接線平面として視覚化することができ、それは一貫したパンタグラフメカニズムを形成する。

Composite Deployable Vault

提案された管状構造を使用して展開可能なシェルのデザインを示します。設計のための基本的な戦略は、最初に曲線から管状アーチを構築し、次にアーチを組み立てて複合ボールトを形成することです。

我々は、その境界クワッドが０ ＜２α ＜１８０°、例えば２α ＝ ９０°の展開状態で共通のｘ － ｙ平面上にあるようにアーチチューブを設計する。この条件が満たされると、連続する曲線は同じ特性に従い、ボールトの境界も同一平面上になります。

各境界の平面性は、β（０）＝β（ｓ１）＝ ９０°であり、したがってτ（０）＝τ（ｓ１）＝ ０であることを意味し、ここで曲線の全長はｓ１で表される。境界の共平面性は、一般に、４つのパラメータ、すなわちＴ（０）−Ｔ（ｓ １）＝ ０および（ｘ（ｓ １）−ｘ（０））・Ｔ（０）＝ ０の一致を必要とする。

一般に、接線ベクトルと位置は数値積分を使用して計算されます。

ここで、反射対称性、すなわちκ（s）=κ（s 1 - s）、τ（s）=-τ（s 1 - s）を仮定することによって、設計空間のサブセットを示す。

この場合、共面性は次のように単純化されます。

T（0.5s0）・T（0）= 0（20）

Typical Design

Grasshopperを使用して曲線、管状構造および細胞構造を計算するパラメトリック設計システムを構築しました。以下は、一定の曲率と調和ねじれの空間曲線を使用した、組み立てられたボールトの典型的なパラメトリック設計例です。

Conclusion

本研究では、空間曲線を用いた曲線折り管状構造とセル構造の幾何学的構成方法を示した。構造の折りたたみの運動学について議論し、複数のアーチを組み立てることで展開可能なボールトの一群の設計バリエーションを示した。組み立てられたボールトの形状はトータルのねじれ量と長方形部分の比率を制御することでコントロールできる。

まず、曲線は、一定の曲率κ（ｓ）＝κ０および調和ねじれτ（ｓ）＝ακ０ ｓｉｎ（２π ｓ ／ ｓ ０）を有するように設定される。

曲線をポリラインに変換して離散化し、曲線とその枠を計算します。そして、式（２０）を満たすように、ラインサーチアルゴリズムを用いてκ0s0を数値的に決定する。

我々は、それらが現像可能な折り目を共有するように、すなわち特定の管の曲線３が次の管の曲線１であるように管の構築を続ける。

式（１２）および式（１３）は幅の割合の変化を計算する。

調和関数の対称性のために、2つの端部は共通の比率wR（s0）= wR（0）を共有し、比率の変化は、wR（0.5s0）= eのように曲線の中央で最大になります。 ^（1 /πακ0s0）w R（0）。

ここで、s = 0における矩形断面のアスペクト比wR / wLが水平面（xy平面）上の断面特徴曲線を決定するので、曲線の中央での割合の変化は、結果として得られるボールトの重要な設計パラメータです。一方、s = 0.5s0での比率は、垂直面（zx平面）上の断面フィーチャを決定します。

一例として、図09はα= 0.3の曲線からのボールト構造を示しており、式（20）はκ0s0〜3.305で満たされているので、比率の変化はwR（0.5s0）/ wR（0）です。 〜37。

アスペクト比pxy = wR（0）/ wL（0）= 0.75の長方形断面を持つチューブを組み立て、xz平面でpxz = wR（0.5s0）/ wL（0.5s0）= 1.41を得ます。

図１０は、パラメータｗ Ｒ（０）／ ｗ Ｌ（０）およびαを変化させることによって得られた設計変動を示す。

これらのパラメータを調整することによって、図１０に見られるように、ｘ − ｙ平面およびｚ − ｘ平面における断面の勾配を変えることができる。

構造は連続的に平らな状態に折り畳まれます。折り畳み角度が変化すると、境界曲線はグランドプレーン上にありません。これはベローズの定理によるもので、厳密に折りたたみ可能な閉じた多面体は禁じられています。

図9: 折りたたみ式管から構成された例示的なボールトの折り畳み運動。

図10: 派生形式のバリエーション: zx平面の断面の勾配は青で、xy平面の勾配は赤で示されています。

References

[1] Tachi, T., “Rigid-Foldable Thick Origami”, in

Origami5, pp. 253-263, 2010.

[2] Tachi, T., Miura, K., “Rigid-Foldable Cylinders and

Cells”, Journal of the International Association for

Shell and Spatial Structures (IASS), 53(4), pp. 217-

226, 2012.

[3] Tachi, T., “One-DOF Rigid Foldable Structures from

Space Curves”, in Proceedings of the IABSE-IASS

Symposium 2011, London, UK, September 20-23,

2011.

[4] Resch R. D., “Portfolio of Shaded Computer Images”,

Proc. IEEE, Vol. 62, No. 4, pp. 496-502, 1974.

[5] Fuchs D., Tabachnikov S., “More on Paperfolding”.

The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No.

1, pp. 27-35, 1999.